KARAKTERISASI MATRIKS ATAS SEMIRING DALAM SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Gregoria Ariyanti
Program Studi Pendidikan Matematika - FKIP
Universitas Katolik Widya Mandala Madiun

ABSTRACT

A Semiring is an algebraic structure $(S,+,\times)$ *such that* $(S,+)$ *is a commutative Semigroup with identity element 0,* $(S,\times)$ *is a Semigroup with identity element 1, distributive property of multiplication over addition and multiplication by 0 as a absorbent element in* S*. A linear equations system over a Semiring* S *is a pair* (A,b) *where* A *is a matrix with entries in* S *and* b *is a vector over* S*. In this paper will be described characterization of matrix* X *that satisfies* $AXA = A$*, with* $A \in M_{m\times n}(S)$*, as necessary or sufficient conditions of solution of linear equations system over Semiring* S*. For a matrix* X *that satisfies* $A \times X \times A = A$*, a linear equations system* $Ax = b$ *has solution* $x = X \times b + (I - X \times A) \times h$ *with arbitrary* h *in* S *if and only if* $A \times X \times b = b$*.*

Key words *: semiring, linear equations system, matrix*

A. Pendahuluan

1. Latar Belakang

Ilmu Matematika meliputi beberapa bidang, di antaranya Aljabar, Analisis, dan Statistika. Bidang Aljabar meliputi beberapa struktur aljabar, misalnya Grup, Ring, Lapangan (*Field*), Semigrup, dan Semiring. Suatu himpunan tak kosong G yang dilengkapi dengan sebuah operasi biner $*$ disebut Grup jika memenuhi sifat-sifat : (1) tertutup; (2) asosiatif; (3) mempunyai elemen nol terhadap operasi biner $*$; dan (4) setiap elemen yang bukan elemen nol mempunyai invers. Selanjutnya, dinotasikan dengan $(G,*)$. Grup $(G,*)$ disebut komutatif jika operasi biner $*$ memenuhi sifat komutatif, yaitu $a * b = b * a$, untuk setiap $a,b \in G$. Sedangkan, suatu himpunan tak kosong R yang dilengkapi dengan dua operasi biner yaitu $*$ dan $\circ$ disebut Ring jika memenuhi sifat-sifat: (1) $(R,*)$ merupakan Grup komutatif; (2) tertutup terhadap operasi biner $\circ$; (3) asosiatif terhadap operasi biner $\circ$; dan (4) terhadap kedua operasi biner $*$ dan $\circ$ bersifat distributif. Dengan penambahan sifat pada Ring diperoleh Ring khusus yang disebut Lapangan (*Field*), yaitu ring $(F,*,\circ)$ yang memiliki sifat: (1) komutatif terhadap operasi biner $\circ$; (2) mempunyai elemen satuan terhadap operasi biner $\circ$; dan (3) setiap elemen yang bukan elemen nol mempunyai invers terhadap operasi biner $\circ$.

Widya Warta No. 01 Tahun XLIII/Januari 2019
ISSN 0854-1981

Jika syarat suatu Grup dan Ring diperlemah, akan muncul struktur aljabar lain, yaitu Semigrup dan Semiring. Artinya, jika beberapa syarat Grup atau Ring ditiadakan, maka struktur aljabar yang terbentuk adalah Semigrup dan selanjutnya Semiring. Salah satu permasalahan atau aplikasi yang sering dijumpai dalam matematika adalah menyelesaikan Sistem Persamaan Linear. Sistem persamaan linear yang telah dikembangkan oleh para peneliti adalah sistem persamaan linear atas Lapangan (*Field*) yang meliputi bilangan real $\mathbb{R}$ atau bilangan kompleks $\mathbb{C}$. Pada penelitian lain, objek penelitian diperluas bukan lagi atas Lapangan, tetapi atas Ring komutatif. Matriks atas Ring komutatif telah dibahas oleh Brown (1993) dan sistem persamaan linear atas Ring komutatif telah dibahas oleh Brewer, dkk. (1986). Asumsi perluasan dari Lapangan ke Ring komutatif tidak mengubah keberlakukan sifat dan definisi secara umum.

Sistem persamaan linear terbagi menjadi sistem persamaan linear homogen dan tak homogen. Suatu sistem persamaan linear mempunyai tiga kemungkinan penyelesaian, yaitu mempunyai penyelesaian tunggal, penyelesaian banyak, dan tidak mempunyai penyelesaian. Eksistensi penyelesaian tersebut sangat tergantung dari sistem persamaan linear itu sendiri.

Dalam penelitian ini, diselidiki karakterisasi matriks atas Semiring dalam sistem persamaan linear dan dibatasi pada sistem persamaan linear tak homogen. Pada bagian B dalam tulisan ini, diuraikan pembentukan sistem persamaan linear, teori dasar dari Semiring, matriks atas Semiring, dan Permutasi. Di dalam bagian C dibahas metode penelitian, sedangkan dalam bagian D dibahas syarat perlu atau syarat cukup penyelesaian sistem persamaan linear tak homogen atas Semiring.

2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah tersebut, dapat dibuat rumusan masalah sebagai berikut: apakah syarat perlu atau syarat cukup penyelesaian sistem persamaan linear tak homogen atas Semiring?

3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah menentukan syarat perlu atau syarat cukup penyelesaian sistem persamaan linear tak homogen atas Semiring.

B. Tinjauan Pustaka

1. Sistem Persamaan Linear atas Lapangan

Diberikan sistem persamaan linear sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1}$$

Sistem persamaan linear (1) di atas merepresentasikan *m* buah persamaan linear dalam *n* buah variabel tak diketahui $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Koefisien a_{i_j} dan konstanta

b_i adalah elemen dari Lapangan himpunan bilangan real $\mathbb{R}$. Sistem persamaan linear (1) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks

$$Ax = B \tag{2}$$

dengan matriks $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B = (b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_m)^T \in \mathbb{R}^m$, dan $x = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Persamaan (1) atau (2) dikatakan mempunyai penyelesaian di $\mathbb{R}^n$, jika ada vektor $\xi \in \mathbb{R}^n$ sehingga $A\xi = B$. Jika $B = 0$ maka sistem persamaan linear $Ax = 0$ disebut sistem persamaan linear homogen. Sistem persamaan linear homogen selalu mempunyai paling sedikit satu penyelesaian yaitu $\xi = 0 = (0 \quad 0 \quad \dots \quad 0)^T \in \mathbb{R}^n$. Penyelesaian $\xi = 0$ demikian disebut penyelesaian trivial dari sistem persamaan linear $Ax = 0$. Sedangkan, vektor $\xi \in \mathbb{R}^n$ disebut penyelesaian tak trivial dari sistem persamaan linear $Ax = 0$ jika $\xi \neq 0$ dan $A\xi = 0$.

Sistem persamaan linear (1) juga dapat dinyatakan dalam bentuk

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \tag{3}$$

yang disebut matriks diperluas (*augmented matrix*) (Anton, 2013). Entri-entri dari matriks diperluas (*augmented matrix*) pada (3) dapat dioperasikan sehingga diperoleh matriks yang lebih sederhana melalui operasi baris elementer.

Definisi B.1.1. (Anton, 2013)

Tiga tipe operasi baris elementer pada matriks $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ yaitu:

a. Mempertukarkan baris ke$-k$ dan baris ke$-l$.
b. Mengalikan baris ke$-i$ dengan konstanta c yang tak nol.
c. Menambahkan c kali baris ke$-k$ dengan baris ke$-l$ untuk $k \neq l$. □

Dengan serangkaian operasi baris elementer yang dikerjakan pada suatu matriks, akan diperoleh matriks dalam bentuk eselon baris tereduksi.

Definisi B.1.2. (Anton, 2013)

Suatu matriks atas Lapangan $\mathbb{R}$ dikatakan mempunyai bentuk eselon baris tereduksi jika memenuhi kondisi berikut:

a. Jika ada suatu baris yang tidak seluruh entrinya 0, maka entri pertama yang tak nol pada baris tersebut adalah unsur 1. Selanjutnya, disebut 1 utama (*leading* 1).
b. Jika ada baris-baris yang seluruh entrinya 0, maka baris-baris ini berada di bagian bawah matriks.
c. Pada dua baris berurutan yang seluruh entrinya tak nol, 1 utama di dalam baris yang lebih bawah terletak di sebelah kanan 1 utama di dalam baris yang lebih atas.
d. Masing-masing kolom yang berisi sebuah 1 utama mempunyai 0 di tempat lainnya.
e. Masing-masing kolom yang memuat sebuah 1 utama, mempunyai entri 0 di tempat lain pada kolom tersebut.

Widya Warta No. 01 Tahun XLIII/Januari 2019
ISSN 0854-1981

Untuk suatu matriks A, simbol $I_t(A)$ melambangkan bentuk eselon baris tereduksi yang berasal dari matriks A melalui serangkaian operasi baris elementer. □

Definisi B.1.3. (Meyer, 2000)

Diberikan E matriks bentuk eselon baris tereduksi yang diperoleh dari matriks A melalui serangkaian operasi baris elementer. Rank dari A didefinisikan sebagai banyaknya baris tak nol di dalam E. Dinotasikan dengan $rk(A)$. □

Syarat perlu dan cukup sistem persamaan linear homogen mempunyai penyelesaian tak trivial dinyatakan oleh Meyer (2000) berikut.

Teorema B.1.4. (Meyer, 2000)

Diberikan $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Sistem persamaan linear homogen $AX = 0$ mempunyai penyelesaian tak trivial jika dan hanya jika $rk(A) < n$. □

2. Semiring

Berikut ini diberikan definisi dan sifat-sifat Semiring yang merupakan generalisasi dari suatu Semigroup berdasarkan Poplin (dalam Ariyanti dkk, 2012).

Definisi B.2.1.

Semigrup S adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner $*$ yang bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $x, y, z \in S$ berlaku $x * (y * z) = (x * y) * z$. □

Lebih lanjut lagi, Poplin memberikan definisi sebagai berikut (Ariyanti dkk, 2012).

Definisi B.2.2.

Semiring adalah suatu himpunan tak kosong S dilengkapi dua operasi biner, penjumlahan (+) dan perkalian ($\times$), yang mempunyai sifat-sifat sebagai berikut.

a. Operasi + adalah komutatif dan asosiatif, yaitu
1) $a + b = b + a$ untuk setiap $a, b \in S$,
2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ untuk setiap $a, b, c \in S$.

b. Operasi $\times$ adalah asosiatif dan distributif terhadap +, yaitu
1) $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ untuk setiap $a, b, c \in$ S,
2) $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ untuk setiap $a, b, c \in S$,
3) $(b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a)$ untuk setiap $a, b, c \in S$.

c. Himpunan S mempunyai sebuah elemen nol θ sehingga
1) $\theta + a = a$ untuk setiap $a \in S$,
2) $\theta \times a = a \times \theta = \theta$ untuk setiap $a \in S$ dan selanjutnya disebut elemen penyerap (absorbsi).

d. Himpunan S mempunyai sebuah elemen satuan e dengan $e \neq \theta$ sehingga $e \times a = a \times e = a$ untuk setiap $a \in S$. □

Seperti halnya di dalam struktur Grup dan Ring, sifat komutatif dan idempoten (*idempotent*) juga berlaku pada Semiring tertentu. Hal tersebut seperti dinyatakan oleh Poplin berikut ini (Ariyanti dkk, 2012).

Definisi B.2.3.

a. Semiring S disebut komutatif jika terhadap operasi perkalian bersifat komutatif, yaitu $a \times b = b \times a$ untuk setiap $a \in S$.

b. Semiring S disebut idempoten terhadap penjumlahan jika $a + a = a$ untuk $a \in S$.

□

Perbedaan utama antara struktur Semiring dan struktur Ring dapat diketahui dari eksistensi elemen invers terhadap operasi penjumlahan.

3. Matriks atas Semiring dan Permutasi

Diberikan S semiring komutatif dengan elemen nol 0 dan elemen satuan 1, bilangan bulat positif n, dan $M_n(S)$ himpunan dari semua matriks $n \times n$ atas S. Terhadap operasi penjumlahan, $M_n(S)$ bersifat komutatif. Berikut ini diberikan definisi terkait matriks atas Semiring S. Diberikan $M_n(S)$ adalah himpunan semua matriks berukuran $n \times n$ dengan entri anggota semiring S.

Definisi B.3.1. (Ariyanti dkk, 2012)

Diberikan $A, B \in M_n(S)$ dan $\alpha \in S$. Berikut ini diberikan definisi operasi dasar matriks atas Semiring.

a. I_n dengan $(I_n)_{ij} = \begin{cases} 1, & jika\ i = j \\ 0, & jika\ i \neq j \end{cases}$ merupakan matriks identitas di dalam $M_n(S)$,

b. $(\alpha \times A)_{ij} = \alpha \times a_{ij}$,

c. $[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$,

d. $[A \times B]_{ij} = \left[\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} . b_{kj})\right]$,

e. Matrik nol berukuran $n \times n$ atas S adalah 0_n yang didefinisikan sebagai matriks dengan semua elemennya adalah 0. □

Untuk $A \in M_n(S)$ dan $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, diberikan A_{ij} unsur (*entry*) dari A dalam baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$. Transpos dari $A \in M_n(S)$ dinotasikan A^t, dengan $A^t_{ij} = A_{ji}$ untuk setiap $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Akibatnya untuk $A, B \in M_n(S)$ berlaku sifat $(A^t)^t = A, (A + B)^t = A^t + B^t$ dan $(AB)^t = B^t A^t$. Di dalam Semiring, elemen-elemen atas Semiring mempunyai invers terhadap operasi +, sehingga dapat didefinisikan determinan suatu matriks atas Semiring S. Oleh karena itu, determinan matriks atas Semiring S dapat dikarakteristikkan dengan permutasi. Adapun definisi permutasi diberikan sebagai berikut.

Definisi B.3.2. (Anton, 2013)

Suatu permutasi merupakan suatu himpunan bilangan bulat yang disusun dalam suatu urutan tanpa penghilangan atau pengulangan.

Berdasarkan Definisi B.3.2. dapat dijelaskan pernyataan berikut. Diberikan $\mathcal{X} = \{1, 2, \dots, n\}$. Suatu fungsi $\sigma : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ disebut permutasi pada n elemen jika σ merupakan fungsi satu-satu dan onto. Selanjutnya, himpunan semua permutasi dari himpunan $\mathcal{X} = \{1, 2, \dots, n\}$. dinyatakan dengan $\mathcal{X}_n$.

Widya Warta No. 01 Tahun XLIII/Januari 2019
ISSN 0854-1981

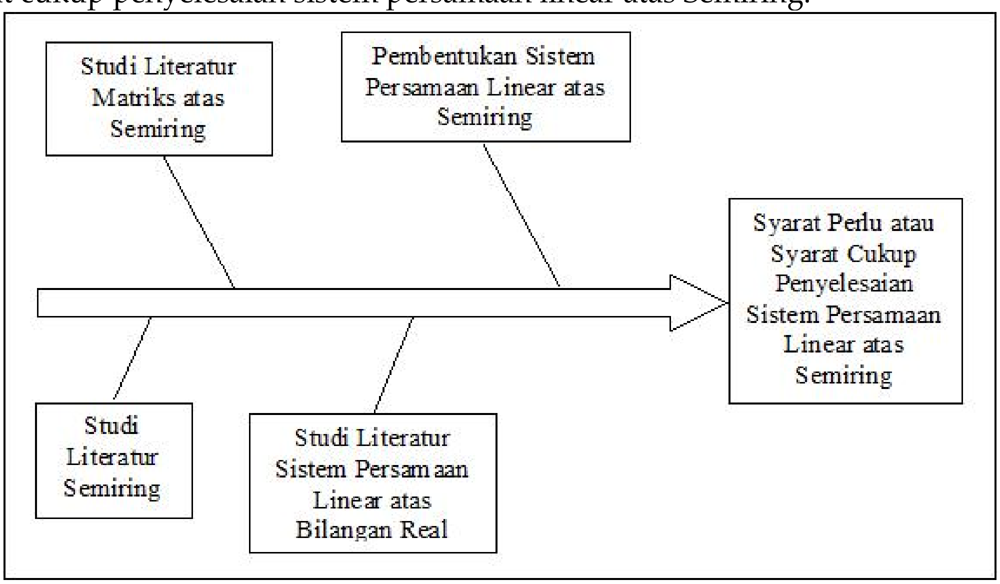
Definisi B.3.3. (Anton, 2013)

Suatu matriks $n \times n$ disebut matriks elementer jika diperoleh dari matriks identitas yang dibentuk dari operasi baris elementer tunggal. □

C. Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian pengembangan yang didasarkan atas studi literatur, sehingga dalam mengembangkan suatu gagasan diperlukan kajian-kajian teoretis dari buku referensi dan jurnal ilmiah. Tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini diawali dengan melakukan studi literatur mengenai Semiring dan karakteristiknya, matriks atas Semiring, sistem persamaan linear atas Lapangan (*Field*) bilangan real dan sistem persamaan linear atas Ring. Kajian ini diperlukan untuk mengembangkan karakterisasi penyelesaian sistem persamaan linear atas Semiring yang dibatasi pada sistem persamaan linear tak homogen.

Berikut ini diberikan *fisbone* (diagram tulang ikan) tentang kerangka berpikir dalam penyelesaian permasalahan sehingga diperoleh hasil yaitu syarat perlu atau syarat cukup penyelesaian sistem persamaan linear atas Semiring.



Gambar 1. ***Fisbone*** **Kerangka Berpikir Penelitian**

Adapun langkah-langkah penelitian sebagai berikut:

1. **Identifikasi Masalah.** Dalam tahap ini dilakukan identifikasi terhadap permasalahan yang ada. Permasalahan yang telah diidentifikasi yaitu menentukan karakterisasi penyelesaian sistem persamaan linear tak homogen atas Semiring.
2. **Pengumpulan Literatur Review (Sumber Pendukung).** Pada tahap ini dilakukan pengumpulan literatur review yang mendukung penelitian dan selanjutnya mempelajari teori-teori pendukungnya. Literatur-literatur yang diambil dari penelitian-penelitian sebelumnya baik jurnal ilmiah dari dalam

maupun luar negeri, serta buku-buku, meliputi bentuk umum sistem persaman linear atas Lapangan, Semiring, Matriks atas Semiring, dan Permutasi.

3. **Analisis Informasi Prasyarat yang Dibutuhkan.** Pada tahap ini akan dilakukan penyusunan/perancangan lemma dan teorema yang diperlukan sebagai prasyarat penyusunan teorema utama, yaitu menentukan syarat perlu atau syarat cukup penyelesaian sistem persamaan linear tak homogen atas Semiring. Sebagai lemma prasyarat adalah eksistensi matriks X yang memenuhi $AXA = A$ dengan X dan A merupakan matriks-matriks atas Semiring S.
4. **Penafsiran dan Penarikan Kesimpulan.** Dalam tahap ini, dilakukan penyusunan syarat perlu atau syarat cukup penyelesaian sistem persamaan linear tak homogen atas Semiring dengan memperhatikan prasyarat yang sudah diperoleh pada tahap sebelumnya.

D. Hasil dan Pembahasan

Berdasarkan sifat-sifat yang dimiliki matriks atas Semiring dan generalisasi dari permutasi yang terdapat pada aljabar konvensional, maka diperoleh karakteristik permutasi suatu matriks atas Semiring.

Definisi D.1.

Matriks A disebut matriks permutasi jika setiap entri dari A adalah 0 atau 1 dengan setiap baris dan setiap kolom memuat tepat satu elemen 1 dan elemen yang lainnya adalah 0. □

Dari Definisi D.1 dapat direpresentasikan sebagai berikut. Jika $\mathcal{X}: \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ suatu permutasi, maka didefinisikan matriks permutasi $P_\sigma = [p_{ij}]$ dengan $p_{ij} = \begin{cases} 1; i = \sigma(j) \\ 0; i \neq \sigma(j) \end{cases}$.

Definisi D.2.

Jika $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in S, \lambda_i \neq 0$ didefinisikan matriks diagonal

$$D(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$ □

Lemma D.3.

Diberikan P_σ matriks permutasi atas Semiring S. Invers dari P_σ adalah transpos dari P_σ. □

Contoh D.4.

Diberikan $P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Diperoleh $(P_\sigma)^{-1} = (P_\sigma)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, karena $P_\sigma \times (P_\sigma)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Widya Warta No. 01 Tahun XLIII/Januari 2019
ISSN 0854-1981

Karena melalui serangkaian operasi baris elementer pada matriks A atas Semiring S dapat diperoleh bentuk eselon baris tereduksi dari matriks A, maka dapat ditinjau banyaknya baris tak nol pada matriks tereduksi tersebut.

Definisi D.5.

Diberikan $A \in M_{m\times n}(S)$ dengan S semiring. Rank dari A, dilambangkan $rank(A)$, adalah banyaknya baris yang tidak nol dalam bentuk eselon baris teredukasi dari matriks A.

Dalam mengkonstruksi syarat perlu atau syarat cuku untuk penyelesaian sistem persamaan linear $A \times x = b$ digunakan matriks A sehingga $A \times X \times A = A$. Secara umum, dari matriks $A \in M_{m\times n}(S)$, dapat diperoleh matriks lain yang merupakan hasilkali matriks-matriks elementer dan matriks A yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema D.6.

Untuk $A \in M_{m\times n}(S)$ dengan $rank(A) = r$, maka terdapat matriks P dan Q yang merupakan hasilkali matriks-matriks elementer sehingga

$$P \times A \times Q = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dengan I_r matriks identitas $r \times r$.

Bukti:

Diberikan E_A bentuk eselon baris tereduksi dari matriks A. Oleh karena itu terdapat matriks P hasil kali matriks-matriks elementer sehingga $P \times A - E$. Diketahui $rank\,(A) = r$, sehingga E_A mempunyai r baris pertama yang tidak nol. Akibatnya, banyaknya kolom yang memuat unsur pertama tidak nol adalah r. Kolom-kolom tersebut dimisalkan $i_1, i_2, \cdots, i_r$, di mana untuk $1 \le s \le r$, kolom ke$-i_s$ mempunyai unsur 1 di dalam baris ke s dan unsur-unsur lainnya adalah 0. Dengan mempertukarkan kolom pada E_A akan diperoleh matriks yang berbentuk

$$\begin{pmatrix} I_r & J \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pada baris teratas dari J dilakukan operasi kolom elementer kemudian dilanjutkan dengan baris kedua dan seterusnya sehingga diperoleh Q yang merupakan hasilkali matriks-matriks elementer. Jadi,

$$P \times A \times Q = E_A \times Q = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$ ■

Teorema berikut menyatakan eksistensi dari matriks X yang memenuhi $A \times X \times A = A$.

Teorema D.7.

Diberikan $A \in M_{m\times n}(S)$ dengan $rank = r$. Suatu matriks X berukuran $n \times m$ memenuhi $A \times X \times A = A$ jika dan hanya jika

$$X = Q \times \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \times P, \quad (5)$$

untuk suatu $D \in M_{(n-r)\times(m-r)}(S)$, $P \in M_{m\times m}(S)$ dan $Q \in M_{n\times n}(S)$ dengan P dan Q hasilkali matriks-matriks elementer, memenuhi

$$P \times A \times Q = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} .$$

Bukti:

($\Leftarrow$) Dari persamaan (4), diperoleh $A = P^{-1} \times \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times Q^{-1}$. Dapat ditunjukkan bahwa suatu X yang diberikan dalam (5) memenuhi

$$\begin{aligned} A \times X \times A &= P^{-1} \times \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times Q^{-1} \times Q \times \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \times P \times P^{-1} \times \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times Q^{-1} \\ &= P^{-1} \times \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times Q^{-1} \\ &= P^{-1} \times \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times Q^{-1} = A . \end{aligned}$$

($\Rightarrow$) Diberikan $A \times X \times A = A$. Dipunyai sifat bahwa $A \times X$ dan $X \times A$ adalah idempoten dan mempunyai rank yang sama dengan matriks A. Selanjutnya, $A \times X$ dan $X \times A$ mempunyai bentuk $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Oleh karena itu, terdapat matriks R dan Q yang merupakan hasilkali matriks-matriks elementer

$$R^{-1} \times A \times X \times R = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dan } Q^{-1} \times X \times A \times Q = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Akibatnya diperoleh,

$$\begin{aligned} R^{-1} \times A \times Q &= R^{-1} \times A \times X \times A \times X \times A \times Q \\ &= (R^{-1} \times A \times X \times R) \times R^{-1} \times A \times Q \times (Q^{-1} \times X \times A \times Q) \\ &= \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times R^{-1} \times A \times Q \times \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Selanjutnya, $R^{-1} \times A \times Q$ mempunyai bentuk

$$R^{-1} \times A \times Q = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = R \times \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times Q^{-1},$$

dengan $rank(C) = rank(A)$. Akibatnya, $P = \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times R^{-1}$, maka

$$P \times A \times Q = \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times R^{-1} \times R \times \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times Q^{-1} \times Q = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Diberikan $Q^{-1} \times X \times P^{-1}$. Dipunyai,

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times Q^{-1} \times X \times P^{-1} = P \times A \times Q \times Q^{-1} \times X \times P^{-1}.$$

Akibatnya,

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times Q^{-1} \times X \times P^{-1} = P \times A \times X \times P^{-1} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Dengan cara yang sama,

$$Q^{-1} \times X \times P^{-1} \times \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Q^{-1} \times X \times P^{-1} \times P \times A \times Q.$$

Oleh karena itu, $Q^{-1} \times X \times P^{-1} \times \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Q^{-1} \times X \times A \times Q = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$

Widya Warta No. 01 Tahun XLIII/Januari 2019
ISSN 0854-1981

Karena dipunyai $Q^{-1} \times X \times P^{-1} - \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ untuk sebarang D, maka diperoleh

$$X = Q \times \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \times P. \quad \blacksquare$$

Teorema berikut menunjukkan syarat perlu dan syarat cukup $Ax = b$ mempunyai penyelesaian dengan suatu matriks X memenuhi $A \times X \times A = A$.

Teorema D.8.

Diberikan $A \in M_{m\times n}(S)$. Untuk X suatu matriks yang memenuhi $A \times X \times A = A$, sistem persamaan linear $Ax = b$ mempunyai penyelesaian $x = X \times b + (I - X \times A) \times h$ dengan h sebarang elemen S jika dan hanya jika $A \times X \times b = b$.

Bukti:

$(\Longrightarrow)$ Diberikan $A \in M_{m\times n}(S)$ dan X suatu matriks yang memenuhi $A \times X \times A = A$. Sistem persamaan linear $Ax = b$ mempunyai penyelesaian $x = X \times b + (I - X \times A) \times h$ dengan h sebarang elemen S. Oleh karena itu,
$A \times [X \times b + (I - X \times A) \times h] = b$
sehingga $A \times X \times b + A \times h - A \times X \times A \times h = b$. Selanjutnya diperoleh $A \times X \times b + A \times h - A \times h = b$. Dan, karena $A \times h - A \times h = 0$, maka diperoleh $A \times X \times b = b$.

$(\Longleftarrow)$ Diberikan $A \in M_{m\times n}(S)$ dan X suatu matriks memenuhi $A \times X \times A = A$. Diketahui $A \times X \times b = b$. Akibatnya,

$$\begin{aligned} Ax &= A \times [X \times b + (I - X \times A) \times h] - A \times X \times b + A \times (I - X \times A) \times h \\ &= A \times X \times b + A \times I \times h - A \times X \times A \times h \\ &= A \times X \times b = b\,. \end{aligned}$$

Jadi, $Ax = b$ mempunyai penyelesaian $x = X \times b + (I - X \times A) \times h$ dengan h sebarang elemen S.

E. Kesimpulan

Untuk $A \in M_{m\times n}(S)$, $x \in M_{n\times 1}(S)$, $b \in M_{m\times 1}(S)$ dengan S semiring dan $rank\,(A) = r$, disimpulkan syarat perlu atau syarat cukup penyelesaian sistem persamaan linear $Ax = B$ sebagai berikut:

1. Terdapat matriks P dan Q yang merupakan hasilkali matriks-matriks elementer sehingga $P \times A \times Q = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dengan I_r matriks identitas $r \times r$.
2. Suatu matriks X berukuran $n \times m$ memenuhi $A \times X \times A = A$ jika dan hanya jika $X = Q \times \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \times P$, untuk suatu $D \in M_{(n-r)\times(m-r)}(S)$, $P \in M_{m\times m}(S)$ dan $Q \in M_{n\times n}(S)$ dengan P dan Q hasilkali matriks-matriks elementer, memenuhi $P \times A \times Q = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$.

3. Untuk X suatu matriks yang memenuhi $A \times X \times A = A$, sistem persamaan linear $Ax = b$ mempunyai penyelesaian $x = X \times b \mid (I \quad X \times A) \times h$ dengan h sebarang elemen S jika dan hanya jika $A \times X \times b = b$.

Daftar Pustaka

Anton, H. 2013. *Elementary Linear Algebra: Applications Version/Howard Anton, Chris Rorres, 11 th edition*. United States of America.

Ariyanti, G., Suparwanto, A., dan Surodjo, B. 2012. *Aljabar Maks Plus Tersimetris dan Sistem Kesetimbangan Linier*. Prosiding Seminar Nasional Aljabar tanggal 14 April 2012 diselenggarakan oleh Program Studi Matematika FMIPA Universitas Diponegoro Semarang.

Brewer, J.W., Bunce, J.W., and Van Vleck, F.S. 1986. *Linear Systems over Commutative Rings*. New York: Marcel Dekker.

Brown, W. C. 1993. *Matrices over Commutative Rings*. New York: Marcel Dekker, Inc.

Meyer, C. D. 2000. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Philadelphia: SIAM.