Widya Warta No. 02 Tahun XXXV / Juli 2011
ISSN 0854-1981

ALJABAR MAX PLUS :
SUATU KAJIAN TEORI DAN APLIKASI FUNDAMENTALNYA

Gregoria Ariyanti
Program Studi Pendidikan Matematika - FKIP
Universitas Katolik Widya Mandala Madiun

ABSTRACT

In max-plus algebra we work with the algebra structures consisting of the set $\mathbb{R}_{max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *together with operations* $a \oplus b = \max(a,b)$ *and* $a \otimes b = a + b$. *The additive and multiplicative identities are taken to be* $\varepsilon = -\infty$ *and* $e = 0$ *respectively. Its operations are associative, commutative and distributive similar to those in conventional algebra.*

In this article matrix over max-plus algebra (or in $\mathbb{R}_{max}$*) is defined. This article emphasizes on max-plus linear algebra specifically. It is evident that some of the concepts of conventional linear algebra are also possessed by a max-plus version. The solvability of linear systems, such as* $A \otimes x = b$ *is specifically elaborated in this article.*

Key words: *max-plus algebra, matrix over max-plus algebra, system of linear equations in max-plus algebra*

A. Pendahuluan

Struktur aljabar yang sudah dikenalkan dalam perkuliahan S1 Program Studi Matematika dan Pendidikan Matematika adalah struktur aljabar atas lapangan (*Field*), yaitu Grup (*Group*) dan Gelanggang (*Ring*). Dalam perkembangannya, struktur aljabar tidak hanya terbatas atas Grup dan Gelanggang saja, tetapi ada jenis lain, yaitu Aljabar Max-Plus (*Max-Plus Algebra*). Ada analogi antara teori dalam Aljabar Max-Plus dan teori struktur aljabar yang sudah dikenal (Grup dan Gelanggang). Namun, ada juga yang berbeda antara teori dalam Grup dan Gelanggang dengan teori dalam Aljabar Max-Plus. Karena Aljabar Max-Plus tidak sepenuhnya dikembangkan seperti dalam Grup dan Gelanggang, meskipun beberapa sifat dan konsep aljabar linier, seperti aturan *Cramer*, teorema *Cayley-Hamilton*, nilai eigen dan vektor eigen juga ada dalam Aljabar Max Plus (Schutter, 1997).

Adapun tujuan penulisan ini adalah untuk menginformasikan tentang struktur aljabar, yang disebut aljabar max-plus, sifat-sifat dasarnya, matriks atas aljabar linier max-plus serta contoh fundamentalnya pada sistem persamaan linier max-plus.

B. Definisi dan Sifat-sifat Dasar Aljabar Max-Plus

Berikut dipaparkan definisi dan sifat-sifat dasar aljabar max-plus (Olsder, 2005).

Definisi 1

Untuk $\mathbb{R}$ himpunan semua bilangan riil, diberikan $\mathbb{R}_{max} = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\varepsilon := -\infty$ dan $e := 0$.

Untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}_{max}$, didefinisikan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ sebagai berikut :

$$a \oplus b := \max(a,b)$$
$$a \otimes b := a + b$$

Berdasarkan definisi 1, karena $\max(a,-\infty) = \max(-\infty,a) = a$ dan $a+(-\infty) = -\infty+a = -\infty$, untuk suatu $a \in \mathbb{R}_{max}$, maka $a \oplus \varepsilon = a = \varepsilon \oplus a$ dan $a \otimes e = a = e \otimes a$.
Dan elemen nol untuk $\oplus$ dalam $\mathbb{R}_{max}$ dinyatakan dengan $\varepsilon := -\infty$.
Dari definisi 1 dapat diberikan contoh berikut :

$5 \oplus 3 = \max(5,3) = 5$
$5 \oplus \varepsilon = \max(5,-\infty) = 5$
$5 \otimes \varepsilon = 5 - \infty = -\infty = \varepsilon$
$e \oplus 3 = \max(0,3) = 3$
$5 \otimes 3 = 5+3 = 8$

Hasil pembentukan $\mathbb{R}_{max}$ bersama dengan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ disebut **Aljabar Max-Plus** (*Max-Plus Algebra*) dan dinotasikan dengan $\Re_{\max} = (\mathbb{R}_{max}, \oplus, \otimes, \varepsilon, e)$.
Ada analogi antara operasi $\oplus$ dan $\otimes$ dalam aljabar max-plus dengan operasi + dan x dalam aljabar linier (konvensional), yaitu operasi $\otimes$ mempunyai prioritas (atau lebih kuat) daripada operasi $\oplus$.
Sebagai contoh, $5 \otimes -9 \oplus 7 \otimes 1$ berarti $(5 \otimes -9) \oplus (7 \otimes 1)$.
Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ juga mempunyai sifat aljabar.
Sebagai contoh, untuk $x, y, z \in \mathbb{R}_{max}$, berlaku

$$\begin{aligned} x \otimes (y \oplus z) &= x + \max(y, z) \\ &= \max(x+y, x+z) \\ &= (x \otimes y) \oplus (x \otimes z), \end{aligned}$$

yang artinya distributif $\otimes$ terhadap $\oplus$.
Adapun sifat aljabar yang lain dari aljabar max-plus adalah (Olsder, 2005):

1. asosiatif, yaitu $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}_{max}$, $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ dan
   $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}_{max}$, $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$
2. komutatif, yaitu $\forall\, x, y \in \mathbb{R}_{max}$, $x \oplus y = y \oplus x$ dan $x \otimes y = y \otimes x$
3. distributif $\otimes$ terhadap $\oplus$, yaitu
   $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}_{max}$, $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$

Widya Warta No. 02 Tahun XXXV / Juli 2011
ISSN 0854-1981

4. adanya elemen nol, yaitu $\forall\ x \in \mathbb{R}_{max}$, $x \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus x = x$
5. adanya elemen satuan (*unit*), yaitu $\forall\ x \in \mathbb{R}_{max}$, $x \otimes e = e \otimes x = x$
6. adanya sifat penyerapan oleh elemen nol ε terhadap $\otimes$, yaitu

   $\forall\ x \in \mathbb{R}_{max}$, $x \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes x = \varepsilon$
7. sifat idempotent dari $\oplus$, yaitu $\forall\ x \in \mathbb{R}_{max}$, $x \oplus x = x$

Untuk $\mathbb{N}$ himpunan semua bilangan asli, didefinisikan untuk $x \in \mathbb{R}_{max}$ sebagai berikut :

$$x^{\otimes n} := \underbrace{x \otimes x \otimes \ldots \otimes x}_{n \text{ faktor}}$$

untuk semua $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \neq 0$, dan untuk $n = 0$ didefinisikan $x^{\otimes 0} := e$ (=0).
Jika dianalogikan dengan aljabar linier, tampak bahwa untuk $n \in \mathbb{N}$,

$$x^{\otimes n} := x + x + \ldots. + x = n \times x.$$

Sebagai contoh,

$5^{\otimes 3} = 3 \times 5 = 5$

$8^{\otimes -2} = -2 \times 8 = -16 = 16^{\otimes -1}$

Didefinisikan pula $\boldsymbol{\varepsilon}^{\otimes \mathbf{0}} := 0$ dan $\boldsymbol{\varepsilon}^{\otimes \boldsymbol{n}} := \varepsilon$, untuk n.

Dari definisi semiring berikut, tampak bahwa aljabar max-plus merupakan salah satu contoh struktur aljabar yang disebut semiring (Farlow, 2009).

Definisi 2

Semiring adalah himpunan tak kosong R dengan dua operasi $\oplus_R$ dan $\otimes_R$ sedemikian sehingga :

a. $\oplus_R$ adalah asosiatif dan komutatif dengan elemen nol ε_R
b. $\otimes_R$ adalah asosiatif, distributif terhadap $\oplus_R$, dan mempunyai elemen satuan (*unit*) e_R
c. ε_R merupakan elemen penyerap terhadap $\otimes_R$.

Semiring demikian dinotasikan oleh $\Re = (R, \otimes_R, \oplus_R, \varepsilon_R, e_R)$.

Jika $\otimes_R$ komutatif, maka $\Re$ disebut komutatif dan jika $\oplus_R$ idempotent, maka disebut idempotent. Suatu operasi $\oplus_R$ dikatakan idempoten pada $\Re$ jika untuk setiap $x \in \Re$ berlaku $x \oplus_R x = x$.

Aljabar max-plus adalah contoh dari semiring komutatif dan idempoten. Karena untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{R}_{max}$, berlaku:

a. $\oplus$ adalah asosiatif dan komutatif dengan elemen nol ε, yaitu :

   $(a \oplus b) \oplus c = \max(\max(a,b),c) = \max(a,b,c) = \max(a,\max(b,c)) = a \oplus (b \oplus c)$

   $a \oplus b = \max(a,b) = \max(b, a) = b \oplus a$

   $a \oplus \varepsilon = \max(a, -\infty) = a$

b. $\otimes$ adalah asosiatif, distributif terhadap $\oplus$ dan mempunyai elemen satuan (*unit*) e, yaitu :
$(a \otimes b) \otimes c = (a + b) + c = a + (b + c) = a \otimes (b \otimes c)$
$(a \oplus b) \otimes c = \max(a, b) + c = \max(a + c, b + c) = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$,
$a \otimes (b \oplus c) = a + \max(b, c) = \max(a + b, a + c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$.
$a \otimes e = a + 0 = a = 0 + a = e \otimes a$

c. ε merupakan elemen penyerap terhadap $\otimes$, yaitu :
$a \otimes \varepsilon = a + (-\infty) = -\infty = (-\infty) + a = \varepsilon \otimes a$.

d. komutatif dan idempoten, yaitu
$a \otimes b = a + b = b + a = b \otimes a$
$a \oplus a = \max(a, a) = a$.

C. Matriks atas Aljabar Max-Plus

Operasi $\otimes$ dan $\oplus$ dalam aljabar max-plus dapat diperluas untuk operasi matriks atas aljabar max-plus. (Olsder, 2005).

Himpunan m x n matriks atas aljabar max plus dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{max}^{mxn}$.

Untuk $n \in \mathbb{N}$, didefinisikan $\bar{n} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Elemen dari matriks A$\in$ $\mathbb{R}_{max}^{mxn}$dalam baris i dan kolom j dinotasikan dengan a_{ij}, untuk $i \in \bar{m}$ dan $j \in \bar{n}$, atau elemen a_{ij} dapat ditulis sebagai $[A]_{ij}$ dengan $i \in \bar{m}$ dan $j \in \bar{n}$.

Jumlahan matriks A,B$\in\mathbb{R}_{max}^{mxn}$, dinotasikan dengan A$\oplus$B, didefinisikan sebagai

$$[A \oplus B]_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = \max(a, b) \text{ untuk } i \in \bar{m} \text{ dan } j \in \bar{n}.$$

Sebagai contoh, diberikan

$$A = \begin{pmatrix} e & \varepsilon \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{dan } B = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

maka $[A \oplus B]_{11} = e \oplus -1 = \max(0, -1) = 0 = e$.

Demikian juga, $[A \oplus B]_{12} = \varepsilon \oplus 11 = \max(-\infty, 11) = 11$

$[A \oplus B]_{21} = 3 \oplus 1 = \max(3, 1) = 3$

$[A \oplus B]_{22} = 2 \oplus \varepsilon = \max(2, -\infty) = 2$

Jadi, $A \oplus B = \begin{pmatrix} e & 11 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Untuk A $\in \mathbb{R}_{max}^{mxn}$, dan $\alpha \in \mathbb{R}_{max}$, perkalian skalar $\alpha \otimes$ A didefinisikan oleh

$$[\alpha \otimes A]_{ij} = \alpha \otimes a_{ij}, \ i \in \bar{m} \text{ dan } j \in \bar{n} .$$

Sebagai contoh, diambil α= 2 dan $A = \begin{pmatrix} e & \varepsilon \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Diperoleh, $[2\otimes A]_{11} = 2\otimes e = 2 + 0 = 2$.

Demikian juga diperoleh, $[2\otimes A]_{12} = \varepsilon$, $[2\otimes A]_{21} = 5$ dan $[2\otimes A]_{22} = 4$.

Widya Warta No. 02 Tahun XXXV / Juli 2011
ISSN 0854-1981

Jadi, $2 \otimes A = \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Sedangkan, untuk $A \in \mathbb{R}_{max}^{mxl}$, dan $B \in \mathbb{R}_{max}^{lxn}$ hasilkali matriks $A \otimes B$ didefinisikan oleh

$$[A \otimes B]_{ik} = \bigoplus_{j=1}^{l} a_{ij} \otimes b_{jk} = \max_{j \in l} \{a_{ij} + b_{jk}\} .$$

Sebagai contoh, diambil $A = \begin{pmatrix} e & \varepsilon \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix}$.

Diperoleh, $[A\otimes B]_{11} = e\otimes(-1)\oplus\varepsilon\otimes 1 = \max(0-1, -\infty+1) = -1$

$[A\otimes B]_{12} = e\otimes 11\oplus\varepsilon\otimes\varepsilon = \max(0+11, -\infty - \infty) = 11$

$[A\otimes B]_{21} = 3\otimes(-1)\oplus 2\otimes 1 = \max(3-1, 2+1) = 3$

$[A\otimes B]_{22} = 3\otimes 11\oplus 2\otimes\varepsilon = \max(3+11, 2-\infty) = 14$

Jadi, $A\otimes B = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}$

Matriks identitas max-plus n x n , E_n, didefinisikan sebagai

$$[E_n]_{ij} = \begin{cases} e, jika\ i = j \\ \varepsilon, jika\ i \neq j \end{cases}$$

Operasi-operasi matriks atas aljabar max-plus mempunyai sifat sebagai berikut (Rudhito, 2003):

1. $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
2. $A \oplus B = B \oplus A$
3. $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$
4. $A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$
5. $(A \oplus B) \otimes C = (A \otimes C) \oplus (A \otimes C)$
6. $\alpha \otimes A = A \otimes \alpha$
7. $\alpha \otimes (\beta \otimes A) = (\alpha \otimes \beta) \otimes A$
8. $\alpha \otimes (A \otimes B) = (\alpha \otimes A) \otimes B = A \otimes (\alpha \otimes B)$
9. $(\alpha \oplus \beta) \otimes A = (\alpha \otimes A) \oplus (\beta \otimes A)$
10. $\alpha \otimes (A \oplus B) = (\alpha \otimes A) \oplus (\alpha \otimes B)$
11. $A \oplus A = A$.

D. Contoh Fundamental Aljabar Max-Plus pada Sistem Persamaan Linier Max-Plus

Dalam bagian ini, akan dipaparkan sistem persamaan linier untuk aljabar max-plus. Meskipun ada beberapa kesamaan antara penyelesaian sistem persamaan linier aljabar max-plus dan aljabar konvensional, tetapi tetap ada perbedaan.

Diberikan persamaan matriks $A \otimes x = b$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} (a_{11} \quad x_1) & (a_{12} \quad x_2) & \cdots & (a_{1n} \quad x_n) = b_1 \\ (a_{21} \quad x_1) & (a_{22} \quad x_2) & \cdots & (a_{2n} \quad x_n) = b_2 \\ \\ (a_{m1} \quad x_1) & (a_{m2} \quad x_2) & \cdots & (a_{mn} \quad x_n) = b_m \end{matrix}$$

Selanjutnya, diperoleh penyelesaian sistem berikut :

$$\max\{(a_{11} + x_1), (a_{12} + x_2), \dots, (a_{1n} + x_n)\} = b_1$$
$$\max\{(a_{21} + x_1), (a_{22} + x_2), \dots, (a_{2n} + x_n)\} = b_2$$
$$\max\{(a_{m1} + x_1), (a_{m2} + x_2), \dots, (a_{mn} + x_n)\} = b_m$$

Akan ditinjau kasus bahwa penyelesaiannya ada dan beberapa elemen dari *b* adalah -∞ (Andersen, 2002). Tanpa kehilangan keumuman, dapat diurutkan persamaan sehingga elemen-elemen berhingga dari *b* berbentuk :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \\ b_k \\ \hline -\infty \\ \\ -\infty \end{pmatrix}$$

Akibatnya,

$$\begin{cases} \max\{(a_{11} + x_1), (a_{12} + x_2), \dots, (a_{1n} + x_n)\} = b_1 \\ \\ \max\{(a_{k1} + x_1), (a_{k2} + x_2), \dots, (a_{kn} + x_n)\} = b_k \\ \max\{(a_{k+1,1} + x_1), (a_{k+1,2} + x_2), \dots, (a_{k+1,n} + x_n)\} = -\infty \\ \\ \max\{(a_{n1} + x_1), (a_{n2} + x_2), \dots, (a_{nn} + x_n)\} = -\infty \end{cases}$$

Matriks tersebut dapat dipartisi sehingga terdapat j dengan $a_{k+1,j}, \dots, a_{m,j} = -\infty$ sebagai berikut :

$$\left(\begin{array}{ccc:c} & A_1 & & A_2 \\ \hdashline -\infty & \cdots & -\infty & \\ & \ddots & & A_3 \\ -\infty & \cdots & -\infty & \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_l \\ \hline x_{i+1} \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \\ b_k \\ \hline -\infty \\ \\ -\infty \end{pmatrix}$$

Diberikan dimensi matriks A_1 yaitu *k* x *l*.

Widya Warta No. 02 Tahun XXXV / Juli 2011
ISSN 0854-1981

Diberikan $b' = \begin{bmatrix} b_1 \\ \\ b_k \end{bmatrix}$ dan $x' = \begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_l \end{bmatrix}$.

Jika $A \otimes x = b$ mempunyai penyelesaian, maka $x_{l+1} = \ldots = x_n = -\infty$, dan $A_1 \otimes x' = b'$. Akibatnya, $A \otimes x = b$ mempunyai penyelesaian jika dan hanya jika x' adalah penyelesaian pada $A_1 \otimes x' = b'$ dan penyelesaian pada $A \otimes x = b$ adalah

$$x = \begin{bmatrix} x' \\ -\infty \\ \\ -\infty \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, penyelesaian dari sistem dengan elemen tak hingga dalam b dapat direduksi pada sistem dengan elemen berhingga dalam b'. Oleh karena itu, dapat dibatasi pada $A \otimes x = b$ dengan semua elemen dari b adalah berhingga.

Jika terdapat penyelesaian pada sistem persamaan max-plus, maka $a_{ij} + x_j \leq b_i$ untuk semua $i \in \{1, \ldots, m\}$ dan $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Untuk mencari penyelesaian dari sistem, pertama perhatikan tiap komponen dari x secara terpisah.

Sebagai contoh, x_1.

Jika ada penyelesaian dari sistem, maka $a_{i1} + x_1 \leq b_i$ untuk $i = 1, 2, \ldots, m$.

Maka $x_1 \leq b_i - a_{i1}$ untuk setiap i, dan pada sistem berikut untuk batas atas x_1 :

$$x_1 \leq b_1 - a_{11}$$
$$x_1 \leq b_2 - a_{21}$$

$$x_1 \leq b_m - a_{m1}$$

Jika sistem pertidaksamaan ini mempunyai penyelesaian, maka akan dipenuhi :

$$x_1 \leq \min \{ (b_1 - a_{11}), (b_2 - a_{21}), \ldots, (b_m - a_{m1})\}.$$

Dengan cara yang sama, dapat diperoleh penyelesaian yang mungkin untuk $x_2, \ldots, x_n$, dan memberikan sistem pertidaksamaan berikut pada tiap elemen x_j :

$$x_1 \leq \min \{ (b_1 - a_{11}), (b_2 - a_{21}), \ldots, (b_m - a_{m1})\}.$$
$$x_2 \leq \min \{ (b_1 - a_{12}), (b_2 - a_{22}), \ldots, (b_m - a_{m2})\}$$

$$x_n \leq \min \{ (b_1 - a_{1n}), (b_2 - a_{2n}), \ldots, (b_m - a_{mn})\}$$

Dari pertidaksamaan di atas, dapat dimisalkan x' penyelesaian pada $A \otimes x = b$, dengan

$$x' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \\ x'_n \end{bmatrix} \text{ di mana } \begin{cases} x'_1 = \min \{ (b_1 - a_{11}), (b_2 - a_{21}), \ldots, (b_m - a_{m1})\} \\ x'_2 = \min \{ (b_1 - a_{12}), (b_2 - a_{22}), \ldots, (b_m - a_{m2})\} \\ \\ x'_n = \min \{ (b_1 - a_{1n}), (b_2 - a_{2m}), \ldots, (b_m - a_{mn})\} \end{cases}$$

Didefinisikan matriks $D_{A,b}$ (*the discrepancy matrix*) sebagai berikut :

$$D_{A,b} = \begin{bmatrix} b_1 - a_{11} & b_1 - a_{12} & \cdots & b_1 - a_{1n} \\ b_2 - a_{21} & b_2 - a_{22} & \cdots & b_2 - a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_m - a_{m1} & b_m - a_{m2} & \cdots & b_m - a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriks $D_{A,b}$ adalah suatu matriks sederhana dengan semua batas atas dari x_i dan setiap x_i dapat ditentukan dengan mengambil minimum dari kolom ke i dari $D_{A,b}$.

Contoh 1 :

Menentukan penyelesaian $A \otimes x = b$

dengan $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ dan $b = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix}$.

diperoleh matriks :

$$D_{A,b} = \begin{bmatrix} 6-2 & 6-3 & 6-1 \\ 10-0 & 10-4 & 10-6 \\ 5-3 & 5-1 & 5-(-2) \\ 11-9 & 11-6 & 11-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 10 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Elemen untuk penyelesaian dapat ditentukan dengan mengambil nilai minimum tiap kolom dari $D_{A,b}$ yaitu :

$$x'_1 = \min\{4, 10, 2, 2\} = 2$$
$$x'_2 = \min\{3, 6, 4, 5\} = 3$$
$$x'_3 = \min\{5, 4, 7, 8\} = 4$$

maka $x' = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ adalah penyelesaian dari $A \otimes x = b$.

Dapat dibuktikan dengan perhitungan berikut :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 & 2) & (3 & 3) & (1 & 4) \\ (0 & 2) & (4 & 3) & (6 & 4) \\ (3 & 2) & (1 & 3) & (-2 & 4) \\ (9 & 2) & (6 & 3) & (3 & 4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} maks\{(2+2), (3+3), (1+4)\} \\ maks\{(0+2), (4+3), (6+4)\} \\ maks\{(3+2), (1+3), (-2+4)\} \\ maks\{(9+2), (6+3), (3+4)\} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Jadi, sistem persamaan linier tersebut mempunyai satu penyelesaian.

Widya Warta No. 02 Tahun XXXV / Juli 2011
ISSN 0854-1981

Contoh 2 :

Menentukan penyelesaian A⊗x = b

dengan A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}$, x = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ dan b = $\begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$.

diperoleh matriks :

$$D_{A,b} = \begin{bmatrix} 6-2 & 6-3 & 6-1 \\ 12-0 & 12-4 & 12-6 \\ 5-3 & 5-1 & 5-(-2) \\ 9-9 & 9-6 & 9-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 12 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Elemen yang akan menjadi penyelesaian dari sistem tersebut dapat ditentukan dengan mengambil nilai minimum tiap kolom dari $D_{A,b}$ yaitu :

$$x'_1 = \min\{4, 12, 2, 0\} = 0$$
$$x'_2 = \min\{3, 8, 4, 3\} = 3$$
$$x'_3 = \min\{5, 6, 7, 6\} = 5$$

tetapi jika $x' = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ disubstitusi pada A⊗x = b, diperoleh bahwa x′ bukan penyelesaiannya. Hal itu dapat ditunjukkan dengan perhitungan berikut :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 & 0) & (3 & 3) & (1 & 5) \\ (0 & 0) & (4 & 3) & (6 & 5) \\ (3 & 0) & (1 & 3) & (-2 & 5) \\ (9 & 0) & (6 & 3) & (3 & 5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} maks\{(2+0), (3+3), (1+5)\} \\ maks\{(0+0), (4+3), (6+5)\} \\ maks\{(3+0), (1+3), (-2+5)\} \\ maks\{(9+0), (6+3), (3+5)\} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Jadi, sistem persamaan linier tersebut tidak mempunyai penyelesaian.

Contoh 3 :

Menentukan penyelesaian A⊗x = b

dengan A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}$, x = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ dan b = $\begin{bmatrix} 8 \\ 13 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$.

diperoleh matriks :

$$D_{A,b} = \begin{bmatrix} 8-2 & 8-3 & 8-1 \\ 13-0 & 13-4 & 13-6 \\ 5-3 & 5-1 & 5-(-2) \\ 10-9 & 10-6 & 10-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 13 & 9 & 7 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Elemen untuk penyelesaian dapat ditentukan dengan mengambil nilai minimum tiap kolom dari $D_{A,b}$ yaitu :

$$x'_1 = \min\{6, 13, 2, 1\} = 1$$
$$x'_2 = \min\{5, 9, 4, 4\} = 4$$
$$x'_3 = \min\{7, 7, 7, 7\} = 7$$

Jika $x' = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ disubstitusi pada $A \otimes x = b$, diperoleh bahwa x' merupakan penyelesaiannya. Hal itu dapat ditunjukkan dengan perhitungan berikut :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 \quad 1) & (3 \quad 4) & (1 \quad 7) \\ (0 \quad 1) & (4 \quad 4) & (6 \quad 7) \\ (3 \quad 1) & (1 \quad 4) & (-2 \quad 7) \\ (9 \quad 1) & (6 \quad 4) & (3 \quad 7) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} maks\{(2+1), (3+4), (1+7)\} \\ maks\{(0+1), (4+4), (6+7)\} \\ maks\{(3+1), (1+4), (-2+7)\} \\ maks\{(9+1), (6+4), (3+7)\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Jadi, sistem persamaan linier tersebut mempunyai penyelesaian.
Tetapi, ada penyelesaian lain yang juga memenuhi sistem tersebut. Yaitu, untuk setiap x yang memenuhi bentuk $x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 7 \end{pmatrix}$ dengan $a \leq 1$ dan $b \leq 4$.

Jika matriks $D_{A,b}$ direduksi menjadi matriks $R_{A,b}$ dengan

$$R_{A,b} = (r_{ij}) \text{ dengan } r_{ij} = \begin{cases} 1 & jika\ d_{ij} = minimum\ dari\ kolom\ j \\ 0 & untuk\ yang\ lain \end{cases}$$

maka dari tiga contoh terakhir dapat diperoleh matriks sebagai berikut :

Contoh 1 : Satu penyelesaian	Contoh 2 : Tidak mempunyai penyelesaian	Contoh 3 : Lebih dari satu penyelesaian
$D_{A,b} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 10 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$	$D_{A,b} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 12 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$	$D_{A,b} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 13 & 9 & 7 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$
$R_{A,b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$R_{A,b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$R_{A,b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Dari matriks di atas tampak bahwa elemen minimum pada masing-masing matriks merupakan penyelesaian dari masing-masing sistem persamaan linier.

Widya Warta No. 02 Tahun XXXV / Juli 2011
ISSN 0854-1981

Tampak pula, bahwa sistem mempunyai penyelesaian jika dalam tiap baris minimal terdapat satu elemen bernilai 1.

Teorema :
Diberikan A⊗*x*=*b* sistem persamaan linier dalam aljabar max plus dengan A matriks *m*x*n* dan *b* matriks *n*x1 dengan semua elemen berhingga.

a. Jika terdapat baris nol dalam matriks $D_{A,b}$ yang direduksi, maka sistem tidak mempunyai penyelesaian.
b. Jika terdapat paling sedikit satu elemen bernilai 1 pada tiap baris dari matriks $D_{A,b}$ yang direduksi menjadi $R_{A,b}$, maka *x′* merupakan penyelesaiannya.

Bukti :

a. Tanpa kehilangan keumumannya, dinotasikan baris nol pada $R_{A,b}$ dengan baris *k*.
   Dengan kontradiksi bahwa $\tilde{x}$ adalah penyelesaian dari A⊗*x* = *b* maka
   $$\tilde{x}_j \le \min_{l} \left(b_l - a_{lj}\right) < b_k - a_{kj}.$$
   Maka $\tilde{x}_j + a_{kj} < b_k$ untuk setiap *j*.
   Oleh karena itu, $\tilde{x}$ tidak memenuhi persamaan ke *k* dan bukan penyelesaian dari A⊗*x* = *b*.
b. Hal di atas juga dapat dibuktikan dengan kontraposisi.
   Misalkan *x′* bukan penyelesaian pada sistem tersebut, dengan definisi, $x'_j \quad b_k - a_{kj}$ untuk semua *j*,*k*.
   Oleh karena itu, $\underset{j}{maks} \left(a_{kj} + x'_j\right) < b_k$ dan jika *x′* bukan penyelesaian maka terdapat k dengan $\underset{j}{maks} \left(a_{kj} + x'_j\right) < b_k$. Hal ini ekuivalen dengan $x'_j < b_k - a_{kj}$ untuk semua *j*. Oleh karena $x'_j = min\,(b_l - a_{lj})$ untuk suatu *l*, maka tidak ada elemen dalam baris *k* dari $R_{A,b}$ yang bernilai sama dengan 1.

E. Penutup

Aljabar max-plus adalah struktur aljabar yang terdiri dari $\mathbb{R}_{max} = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ dengan ε := -∞ , dilengkapi operasi ⊕ dan ⊗ , didefinisikan untuk *a*, *b* ∈ $\mathbb{R}_{max}$ sebagai berikut :

$$a \oplus b := \max(a,b)$$
$$a \otimes b := a + b$$

Operasi $\otimes$ dan $\oplus$ dalam aljabar max-plus dapat diperluas untuk operasi matriks atas aljabar max-plus, dengan himpunan m x n matriks atas aljabar max plus dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{max}^{mxn}$.

Dalam aljabar max plus, sistem persamaan linier *mxn* dapat mempunyai satu penyelesaian, tidak mempunyai penyelesaian, dan mempunyai penyelesaian lebih dari 1, yang juga berlaku pada aljabar konvensional.

DAFTAR PUSTAKA

Andersen, Maria H. 2002. *Max-Plus Algebra : Properties and Applications.* http://www.teachingcollegemath.com/files/. Diakses 5 Februari 2011.

Farlow, Kasie G. 2009. *Max-Plus Algebra.* Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University.

Olsder, G.J., and Woude, J. 2005. *Max Plus at Work.* United State : Princeton University Press.

Rudhito, Andy. 2003. *Sistem Linear Max-Plus Waktu-Invariant*. Tesis: Program Pascasarjana Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.

Schutter, B. 1997. "*The Singular Value Decomposition in The Extended Max Algebra*," *Linear Algebra and Its Applications*, vol. 250, pp.143-176, Jan 1997. http://pub.deschutter.info/abs/94.27.html diakses 19 Januari 2011.